

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений

Каменский М.И.

подпись, расшифровка подписи

25.05.2023 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.В.08 Компьютерное моделирование стратифицированных сред**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 02.04.01 математика и компьютерные науки.
- 2. Профиль подготовки:** математическое и компьютерное моделирование
- 3. Квалификация выпускника:** магистр
- 4. Форма образования:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Исполнители программы:** Пенкин Олег Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений
- 7. Рекомендована:** научно-методическим советом математического факультета  
Протокол № 0500-06 от 25.05.2023
- 8. Учебный год:** 2021-2022 **Семестр(ы):** первый

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является ознакомление студентов с методами исследования дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах, моделирующих процессы, возникающие в сильно непрерывных средах.

Задачами курса являются:

- 1) изучение методов моделирования процессов в сильно неоднородных средах;
- 2) Изучение качественных свойств гармонических функций на стратифицированных множествах;
- 3) изучение методов численного решения задачи Дирихле для оператора Лапласа на стратифицированном множестве на основе подбора специальных броуновских процессов и их компьютерного моделирования.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** дисциплина относится к профессиональному циклу и является специальной дисциплиной (общепрофессиональной) части данного цикла.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса «Компьютерное моделирование стратифицированных сред»:

- математический анализ (производная, дифференциал функции и их приложения, экстремум функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные, непрерывность);
- теория меры (стратифицированные меры, дивергенция и лапласиан по стратифицированной мере);
- теория уравнений с частными производными (эллиптические уравнения и свойства их решений);
- функциональный анализ (линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве);

Дисциплина «Компьютерное моделирование стратифицированных сред» является полезной для более глубокого понимания курсов по уравнениям математической физики, уравнений в частных производных, дифференциальных уравнений, краевых задач.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПКВ-1.	Способен проводить научно-исследовательские разработки в области математического моделирования физических и экономических	ПКВ-1.2	Умеет использовать соответствующие базовые знания при проведении научно-исследовательских работ	знать: методы исследования дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах, возникающие при моделировании процессов в сильно неоднородных средах. уметь: моделировать реальные процессы в сильно неоднородных средах на компьютере. владеть: навыками моделирования процессов, возникающих в непрерывных системах стратифицированной структуры

	процессов методами функционального анализа, а также реализовывать программно соответствующие математические алгоритмы	ПКВ-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний и реализации программно соответствующих математических алгоритмов	знать: основные исследования дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах, моделирующих процессы в сильно неоднородных средах, уметь: применять методы для исследования теоретических и практических задач владеть: навыками построения численных решений эллиптических уравнений на стратифицированных множествах на основе специальных случайных процессов.
ПКВ-2	Способен проводить работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического и компьютерного моделирования различных процессов	ПКВ-2.3	Имеет практический опыт исследований в конкретной области математического и компьютерного моделирования	знать: основные методы исследования дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах, моделирующих процессы, возникающие в непрерывных системах сетеподобной структуры, уметь: моделировать процессы, возникающие в непрерывных средах стратифицированной структуры в виде дифференциальных уравнений или случайных процессов диффузионного типа. владеть: навыками моделирования практических задач уравнениями на стратифицированных множествах.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/ 108.**

**Форма промежуточной аттестации зачет**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			№ 1	№ семестра	...
Аудиторные занятия		32	32		
в том числе:	лекции	16	16		
	практические	-	-		
	лабораторные	16	16		
Самостоятельная работа		76	76		
в том числе: курсовая работа (проект)		-	-		
Форма промежуточной аттестации (экзамен – __ час.)		<i>Зачет, т, к.</i>	<i>Зачет, к.</i>		
Итого:		108	108		

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Задачи, приводящие к уравнениям на стратифицированных множествах.	Задача о малых перемещениях механической системы, составленной из струн и мембран под действием поперечных нагрузок. Задача о случайном блуждании частицы по стратифицированному множеству.	
1.2	Основные понятия, связанные со стратифицированными множествами.	Определение стратифицированного множества. Описание топологии на стратифицированном множестве. Разбиение стратифицированного множества на границу и внутренность. Описание регулярных примыканий страт.	
1.3	Стратифицированная мера и интеграл Лебега по стратифицированной мере.	Напоминание понятия измеримого пространства и интеграла Лебега. Определение стратифицированной меры и интеграла Лебега по ней.	
1.4	Дивергенция и лапласиан на стратифицированном множестве	Определение касательного векторного поля на стратифицированном множестве. Физическая интерпретация дивергенции векторного поля на стратифицированном множестве и вывод формулы для дивергенции в терминах плотности потока векторного поля по стратифицированной мере. Стратифицированный лапласиан.	
1.5	Некоторые качественные свойства решений эллиптических уравнений на стратифицированных множествах.	Формулы Грина на стратифицированном множестве. Некоторые аналоги теоремы о среднем для лапласиана на стратифицированном множестве. Сильный принцип максимума для гармонических функций на стратифицированном множестве.	
1.6	О слабой разрешимости задачи Дирихле для лапласиана на стратифицированном множестве.	Определение пространств соболевского типа на стратифицированном множестве. Неравенства Сobleва и Пуанкаре на стратифицированном множестве. Доказательство слабой разрешимости задачи Дирихле для лапласиана на стратифицированном множестве.	

1.7	Случайные процессы на стратифицированном множестве.	Вероятностная интерпретация задачи Дирихле на стратифицированном множестве в терминах специальных случайных блужданий. Решение задачи Дирихле методом Монте-Карло с помощью компьютерного моделирования случайного блуждания на стратифицированном множестве. Решение задачи Дирихле сеточным методом.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Моделирование процессов в стратифицированных средах	Моделирование малых перемещений механических систем, составленных из струны и мембран. Постановка задачи Дирихле для таких систем в виде набора уравнений для отдельных элементов (страт). Волновое уравнение на одномерном стратифицированном множестве (графе).	
2.2	Решение задач на стратифицированных мерах и вычисление интегралов Лебега по таким мерам.	Решение стандартных задач теории меры. Вычисление интегралов Лебега по стратифицированной мере. Вычисление потоков векторных полей через границу стратифицированного множества.	
2.3	Решение задач на применение интегральных тождеств на стратифицированных множествах.	Нахождение дивергенции векторных полей. Вычисление потоков векторных полей на основе теоремы о дивергенции (формулы Гаусса - Остроградского) на стратифицированном множестве.	
2.4	Численное решение задачи Дирихле с помощью сеточных методов.	Выписывание системы разностных уравнений в задаче Дирихле на стратифицированном множестве и её решение на компьютере в стандартных приложениях в Python.	
2.5	Решение задачи Дирихле методом Монте-Карло	Нахождение случайного блуждания для задачи Дирихле на стратифицированном множестве. Моделирование этого процесса в среде Python и решение соответствующей задачи Дирихле.	
<b>3. Лабораторные работы</b>			

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Работа с текстом конспекта лекции, изучение рекомендованной литературы, систематическая подготовка к лабораторным занятиям, выполнение индивидуальных заданий и заданий предложенных в методичках.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

**а) основная литература:**

№ п/п	Источник
1.	<i>Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л., Прядиев. Боровских. К.П. Лазарев, С.А. Шабров -М. : Физматлит, 2004. – 272 с.</i>
2.	<i>Lieb E, Loss M. Analysis, AMS, vol. 14, 2001</i>
3	<i>Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория Вероятностей и случайные процессы.</i>

**б) дополнительная литература:**

№ п/п	Источник
4.	<i>Adams R, Fournier J. Sobolev Spaces. Academic Press, 2005</i>
5.	<i>Fritz John. Partial Differential Equations. Springer Verlag, 1982</i>
6.	<i>Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic Differential Equations of Second Order. Springer Verlag, 2001</i>

**в) информационные электронно-образовательные ресурсы:**

№ п/п	ИсточникП

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

№ п/п	Источник
1	<i>Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л., Прядиев. Боровских. К.П. Лазарев, С.А. Шабров -М. : Физматлит, 2004. – 272 с.</i>
2	<i>Lieb E, Loss M. Analysis, AMS, vol. 14, 2001</i>
3	<i>Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория Вероятностей и случайные процессы.</i>
4	<i>Adams R, Fournier J. Sobolev Spaces. Academic Press, 2005</i>
5	<i>Fritz John. Partial Differential Equations. Springer Verlag, 1982</i>
6	<i>Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic Differential Equations of Second Order. Springer Verlag, 2001</i>

**17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ».

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows, Microsoft Office, LibreOffice, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet Explorer, Maxima.

---

### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам, мультимедийный проектор, доска (мел, маркеры).

Для проведения лабораторных занятий и самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

### 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Волновое уравнение на пространственной сети	ПКВ-2	ПКВ-2.1 ПКВ-2.2 ПКВ-2.3	Домашнее задание, устный опрос, практические задания
2.	Обобщенные решения волнового уравнения на конечном графе	ПКВ-2	ПКВ-2.1 ПКВ-2.2 ПКВ-2.3	Домашнее задание, устный опрос, практические задания
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				Перечень вопросов Практическое задание

### 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

#### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашнее задание, устный опрос, практические задания

1. Домашнее задание выполняется каждым студентом самостоятельно и обсуждается на следующем занятии.

2. Студенты овладевают навыками применения методов исследования дифференциальных уравнений на пространственных сетях, моделирующих процессы, возникающие в непрерывных системах сетеподобной структуры.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
---------------------------------	--------------------------------------	--------------

Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачтено</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы	<i>Базовый уровень</i>	
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания.	<i>Пороговый уровень</i>	
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	<i>Незачтено</i>

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

*Собеседование по билетам к зачету*

Билеты к зачету формируются из заданий

***Перечень заданий, вопросов к зачету и порядок формирования КИМ***

**Перечень вопросов к зачету:**

1. Стратифицированные множества.
2. Стратифицированная мера.
3. Интеграл Лебега по стратифицированной мере.
4. Дивергенция и лапласиан на стратифицированном множестве.
5. Теорема о дивергенции и формулы Грина.
6. Соболевские пространства на стратифицированном множестве.
7. Неравенства Соболева и Пуанкаре на стратифицированном множестве.
8. Слабая разрешимость задачи Дирихле на стратифицированном множестве.
9. Теорема о среднем для мягкого лапласиана.
10. Сильный принцип максимума для гармонических функций.
11. Случайные блуждания для задачи Дирихле.
12. Метод Монте-Карло.

**Пример контрольной работы**

**Вариант 1**



1. Вычислить интеграл Лебега скалярной функции на стратифицированном множестве.
2. Выписать математическую модель заданной механической системы.

### Примеры практических заданий

Оценить скорость сходимости полученной схемы в зависимости от гладкости функции воздействия.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков. КИМ содержит два теоретических вопроса и одно практическое задание. По желанию обучающегося практическое задание может быть заменено на следующее задание, выполняемое в течение семестра: найти практическую задачу, сводящуюся к дифференциальным уравнениям и представить её компьютерную модель.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Зачтено</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы	<i>Базовый уровень</i>	
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трем из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания.	<i>Пороговый уровень</i>	
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	<i>Незачтено</i>